



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024-I**

Trigonometría

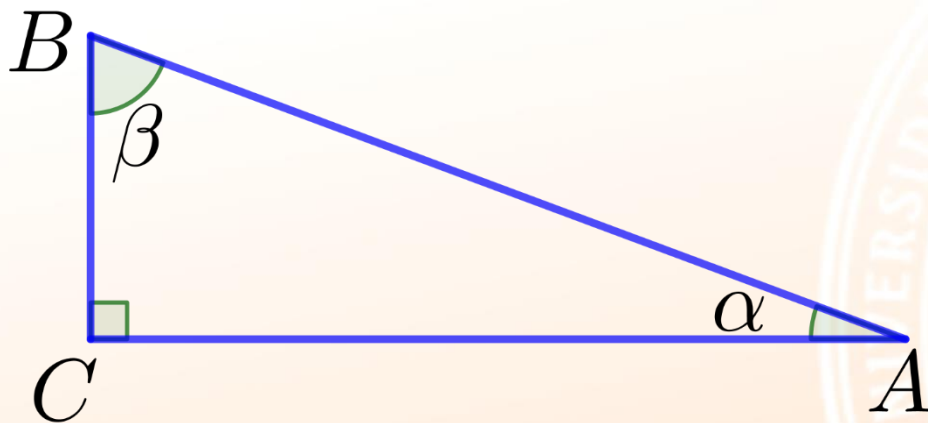
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS



CONCEPTOS Y TEOREMAS PREVIOS

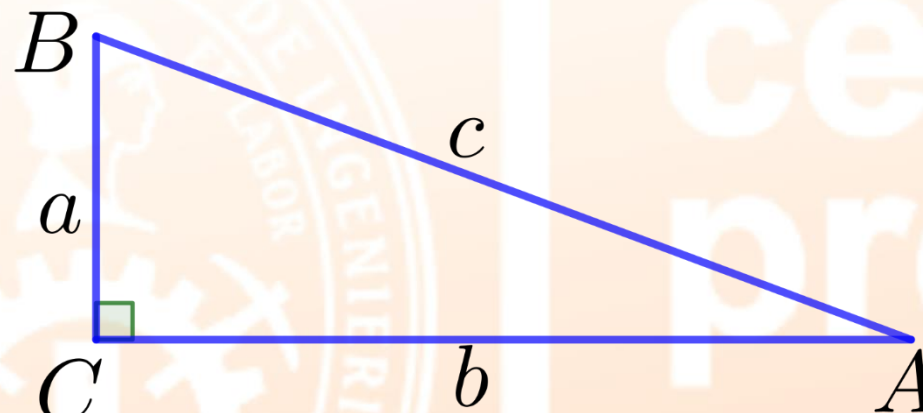
Dado un triángulo rectángulo:

Las medidas de sus ángulos agudos son complementarios.



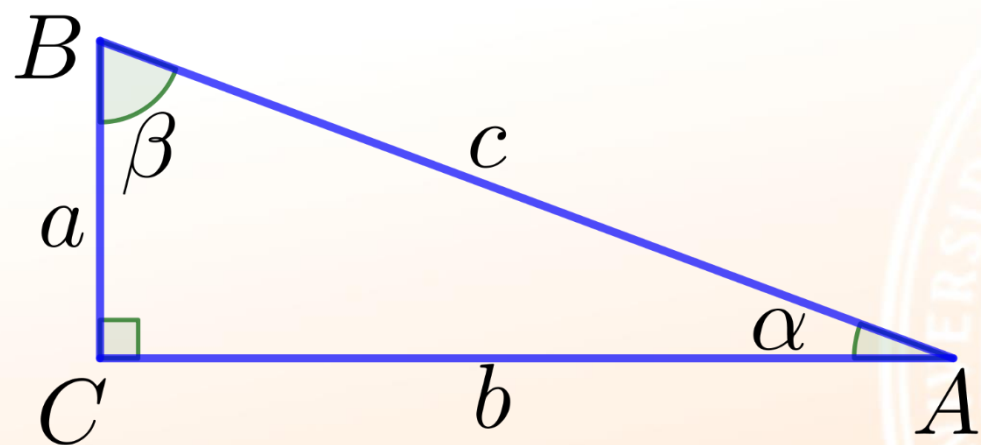
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Las longitudes de los lados cumplen con el teorema de Pitágoras.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Los lados perpendiculares (catetos) reciben nombres especiales, según el ángulo agudo que se elija como referencia. El lado de mayor longitud se le denomina hipotenusa.



Longitud del cateto opuesto a α : a

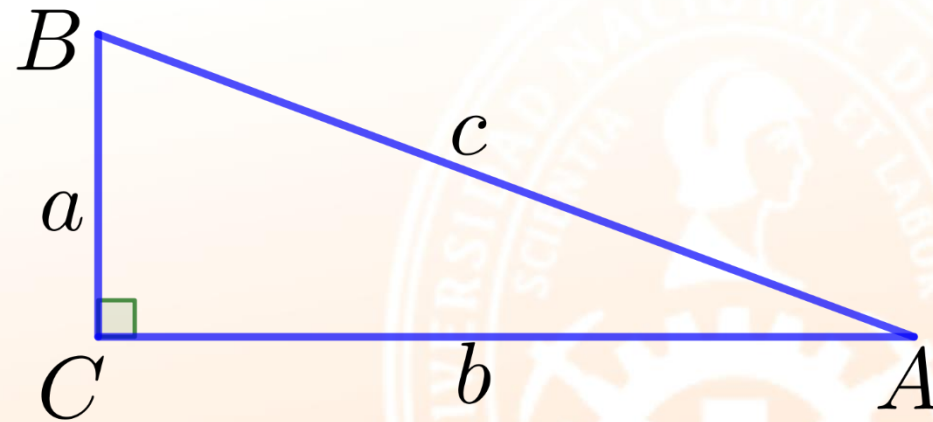
Longitud del cateto adyacente a α : b

Longitud del cateto opuesto a β : b

Longitud del cateto adyacente a β : a

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Se denomina razón trigonométrica (R.T.) al cociente que se establece entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.



En todo triángulo rectángulo, se puede establecer solo seis razones entre sus tres lados, elegidos de dos en dos, así si las longitudes de sus lados son a , b y c , se tiene:

$$\frac{a}{b}; \frac{b}{a}; \frac{c}{b}; \frac{b}{c}; \frac{a}{c}; \frac{c}{a}$$

Definición

Dado un ángulo agudo de medida " α " se define:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

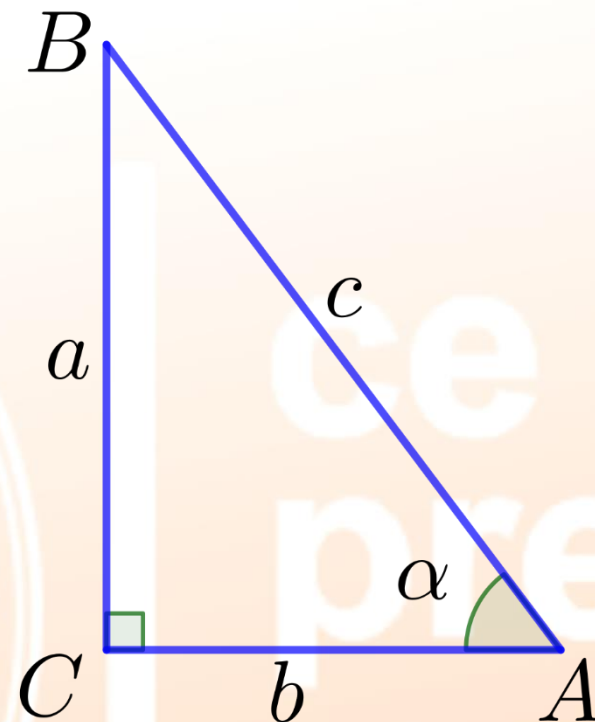
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

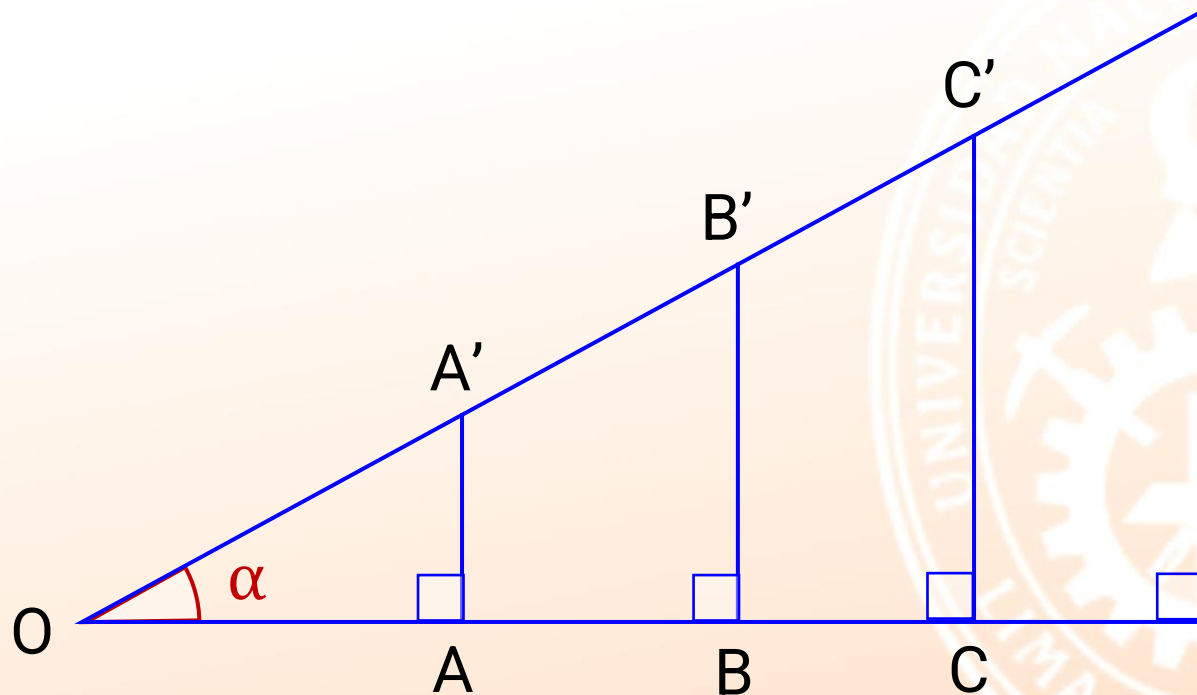
$$\sec(\alpha) = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha} = \frac{c}{a}$$



PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo son independientes del tamaño del triángulo rectángulo que contiene al ángulo referido, pero sí de la relación entre los lados, según se muestra en la figura.



$$\sin(\alpha) = \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}$$

PROBLEMA 01 (PC 01 CEPRE UNI 2020-I)

Siendo θ la medida de un ángulo agudo, tal que: $\sec(\theta) = 17/15$

Calcule n en la igualdad: $8\cot(\theta) + n = 8\csc(\theta)$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: B**PROBLEMA 02**

A y B son las medidas de dos ángulos agudos y complementarios, para los cuales se verifica que:

$$\tan(A) = \frac{2x - 1}{x}; \quad \sin(B) = \frac{x}{2x + 1} \quad . \quad \text{Calcule: } \sec(A) + \cot(B)$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: D

PROBLEMA 03

En un triángulo ABC ($B = 90^\circ$), se cumple que:
 $\text{sen}(A) + 2\cos(C) = 2\cot(C) - \tan(A)$; Calcule el valor de $\text{sen}^2(A) - 2\text{sen}^2(C)$.

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{2}{9}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{5}{2}$

CLAVE: D**PROBLEMA 04**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC , recto en B . Si $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ y $b \cdot \text{sen}(A) - a \cdot \tan(C) = 2b/3$, calcule el valor de: $\sec(A) \sec(C)$.

A) 1,2

B) 1,8

C) 2,4

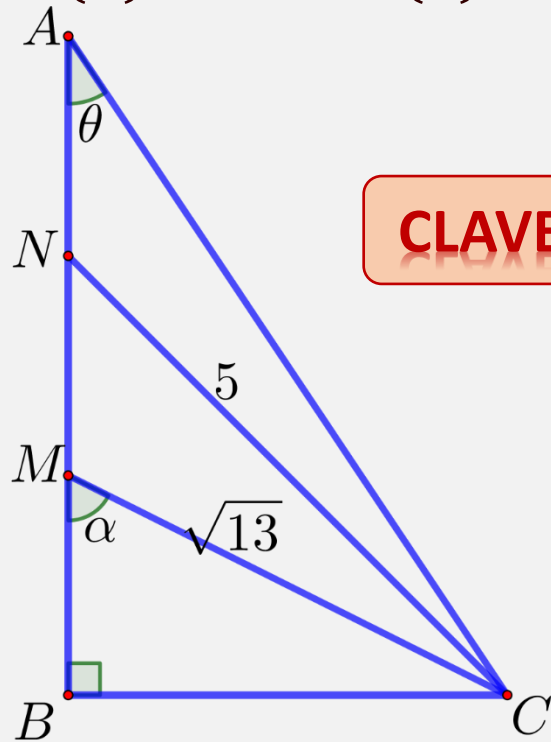
D) 3,6

E) 5,4

CLAVE: D

PROBLEMA 05 (EX. UNI 2022-I)

Si en la figura adjunta M y N trisecan a $\overline{AB}$; el valor de $\sqrt{13}\text{sen}(\alpha) + \sqrt{5}\text{sen}(\theta)$ es:

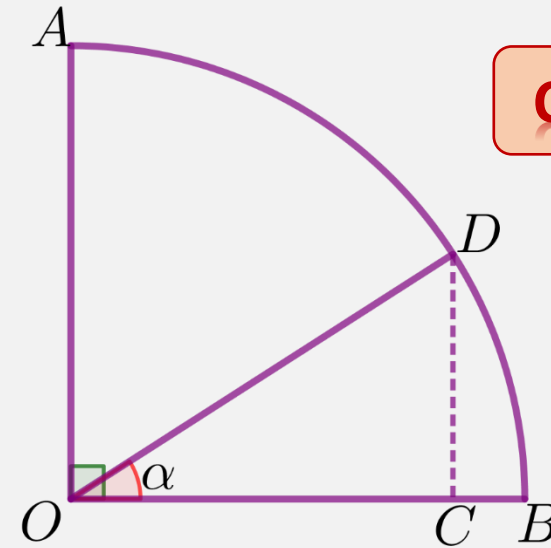


CLAVE: D

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 06 (1ER EX PARCIAL 23-II)

En la figura, se muestra la cuarta parte de una circunferencia cuyo centro es O. Si $OA = 6\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$ y $\overline{OA} \parallel \overline{CD}$. Calcule el valor de $\tan(\alpha)$

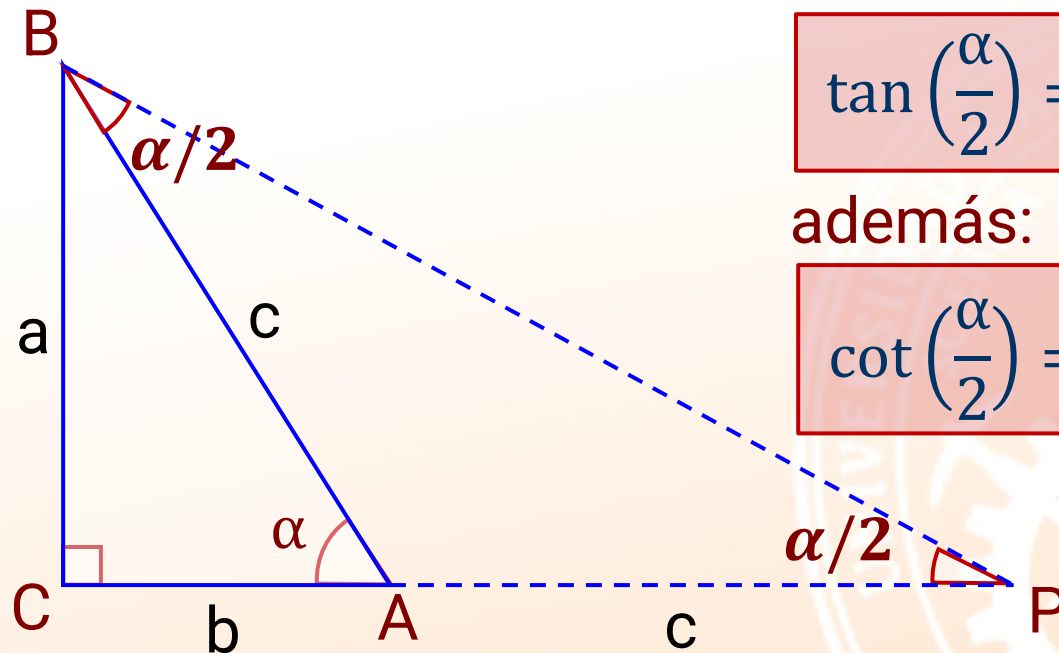


CLAVE: A

- A) $\sqrt{5}/2$ B) $\sqrt{5}/4$ C) $\sqrt{5}/6$
D) $\sqrt{5}/8$ E) 1

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN SEMI ÁNGULO AGUDO

Para obtener las razones trigonométricas de la mitad de un ángulo agudo se hace una construcción geométrica como sigue:



En el triángulo rectángulo PCB:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{c+b}$$



$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \csc(\alpha) - \cot(\alpha)$$

además:

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c+b}{a}$$



$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \csc(\alpha) + \cot(\alpha)$$

Observación:

$$\frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}$$

PROBLEMA 07

Si, $0 < x < \frac{\pi}{8}$ y $\text{sen}(4x) = \frac{1}{8}$ Calcule: $\text{sen}(45^\circ + 2x) + \sqrt{7} \cot(45^\circ - 2x)$

- A) $15/4$ B) $15/2$ C) $3/4$ D) $20/3$ E) $21/5$

CLAVE: A

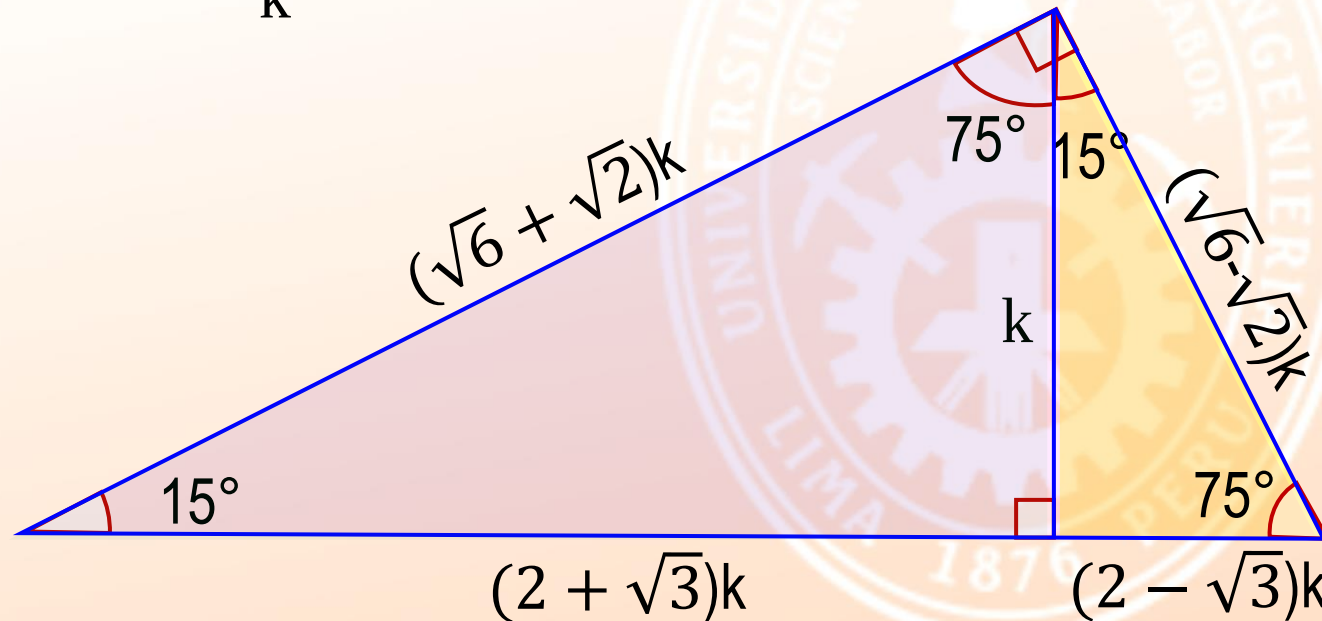
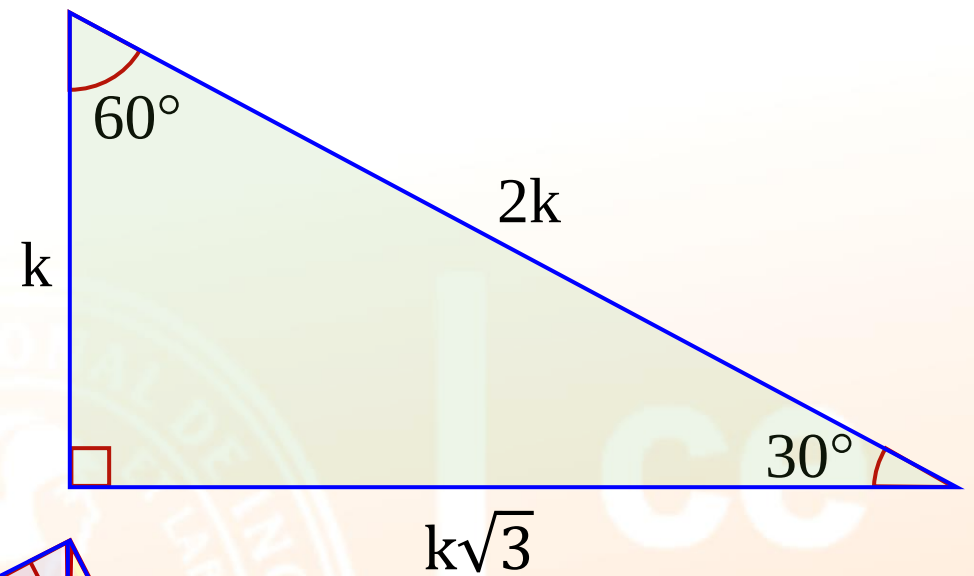
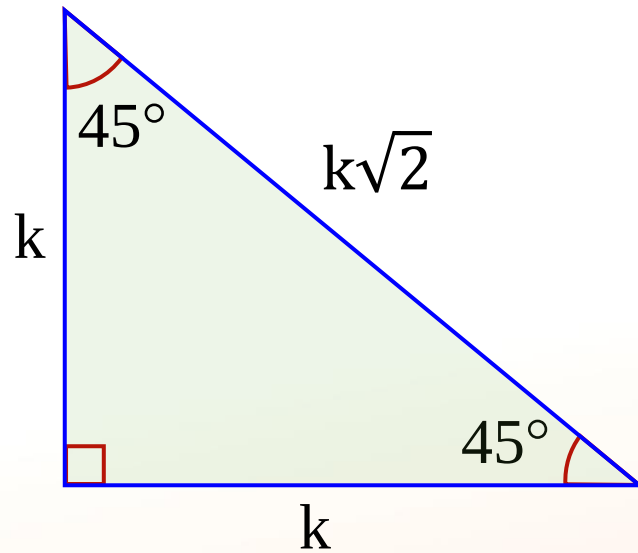
PROBLEMA 08

Calcule el valor aproximado de: $\cot(2^\circ) - \sqrt{100 + 70\sqrt{2}} - 5\sqrt{2}$

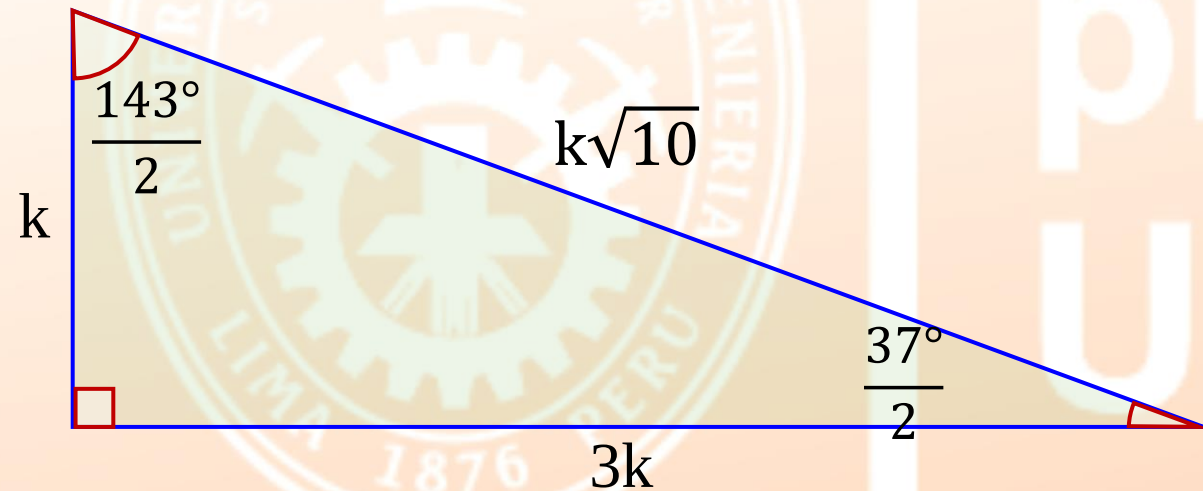
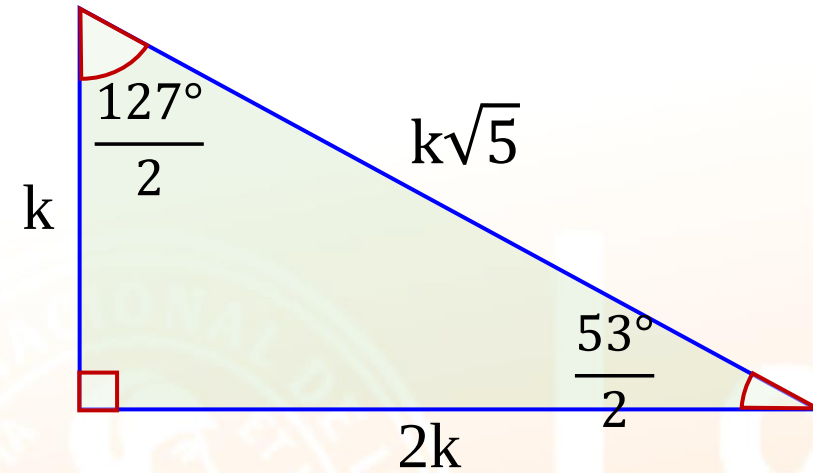
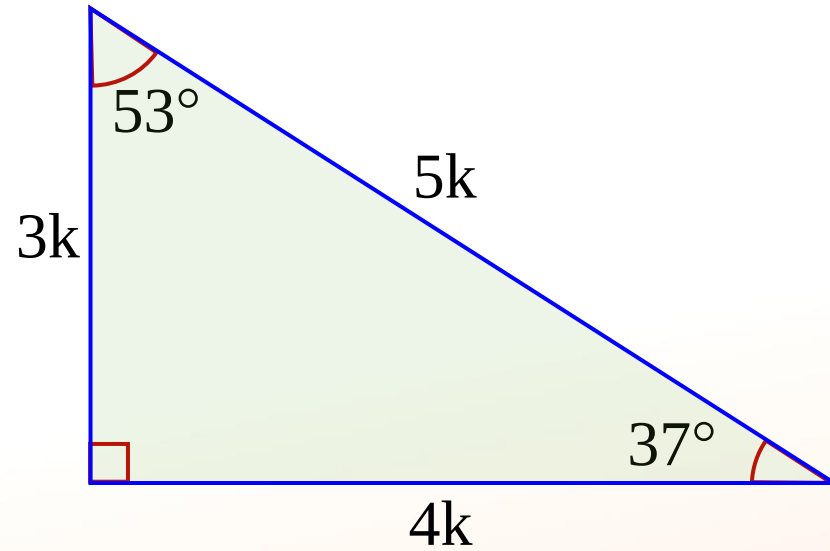
- A) 5 B) 6 C) 7 E) 8 E) 9

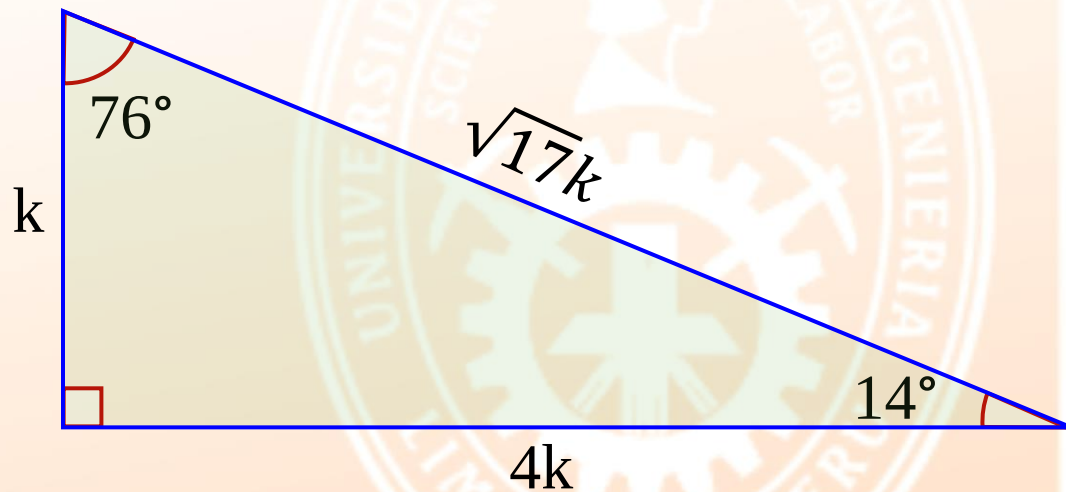
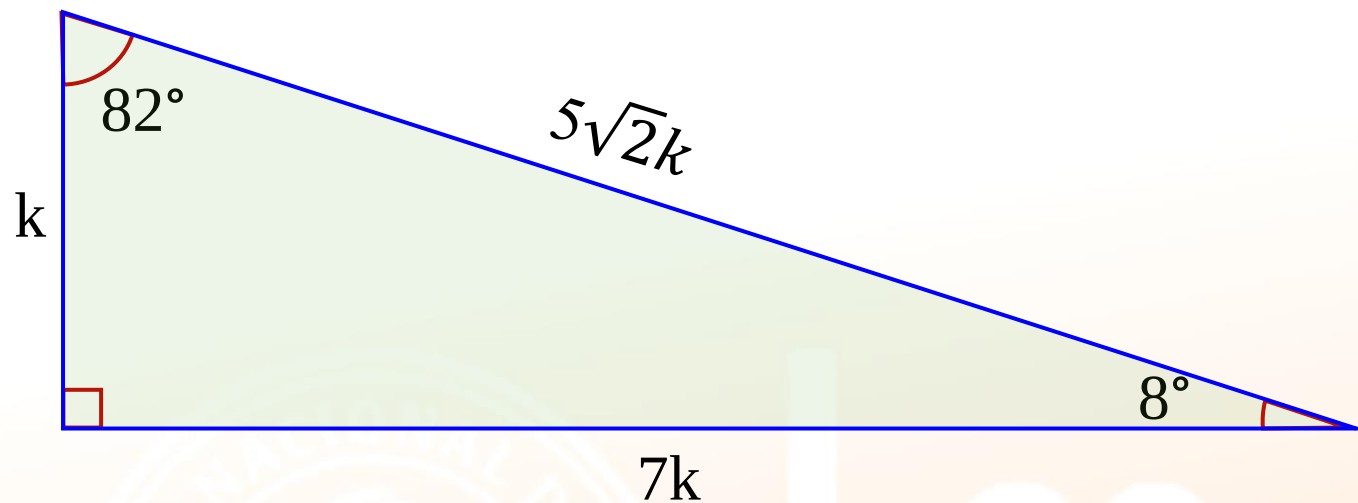
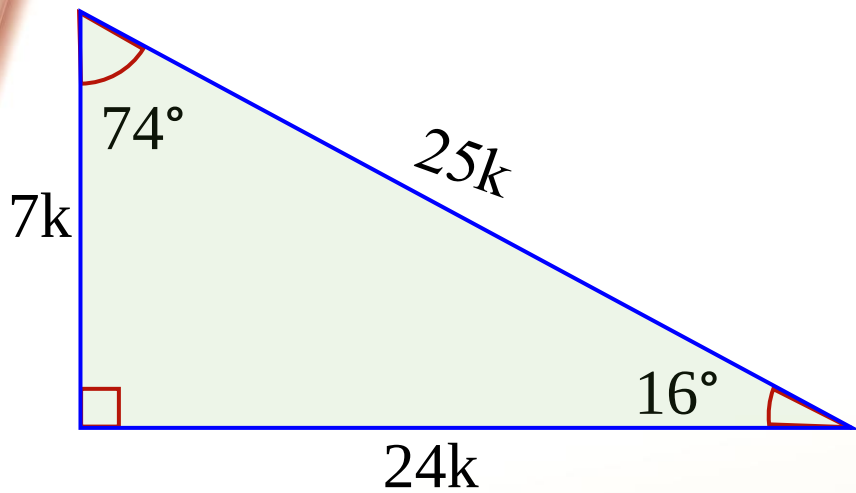
CLAVE: C

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES (de naturaleza exacta)



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES (de naturaleza aproximada)

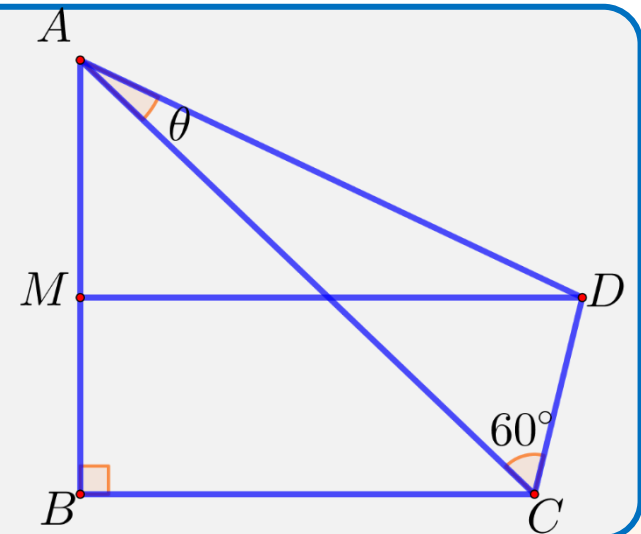




PROBLEMA 09 (EX UNI 2007 - I)

En la figura mostrada si $AB = BC$ y M es punto medio de $\overline{AB}$, donde $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$, calcule el valor de $\tan(\theta)$

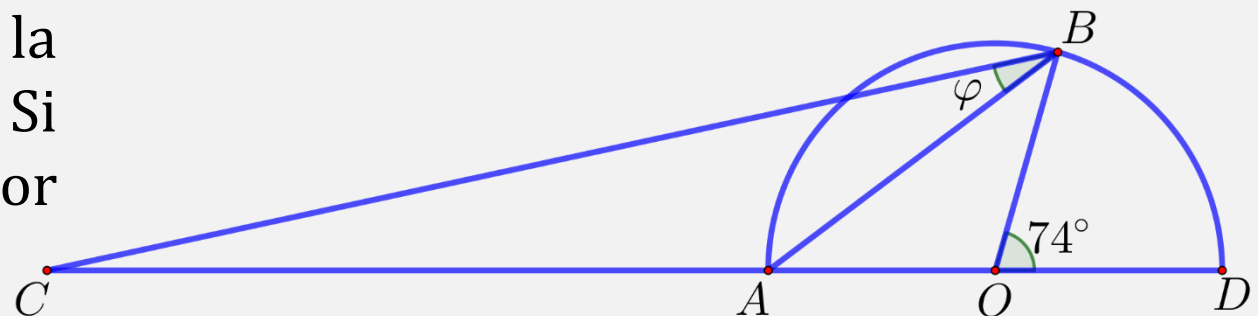
- A) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1}$



CLAVE: A

PROBLEMA 10 (PC 01 CEPRE UNI 2022-I)

La figura muestra a la semicircunferencia con centro en O . Si $AC = 2(AB)$; calcule el valor aproximado de $13\tan(\varphi)$.

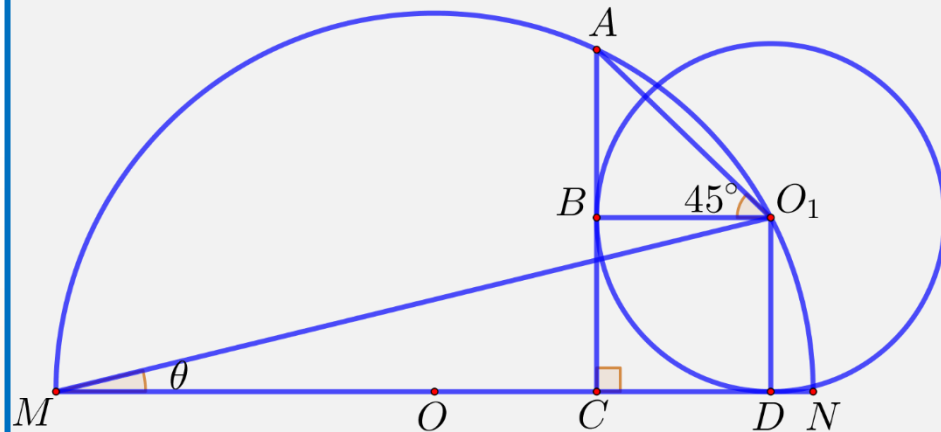


- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

CLAVE: B

PROBLEMA 11 (1er Ex Parcial 23-II)

En la figura mostrada, O y O_1 son centros de la semicircunferencia y circunferencia respectivamente. B y D son puntos de tangencia. Calcule $\cot(\theta)$

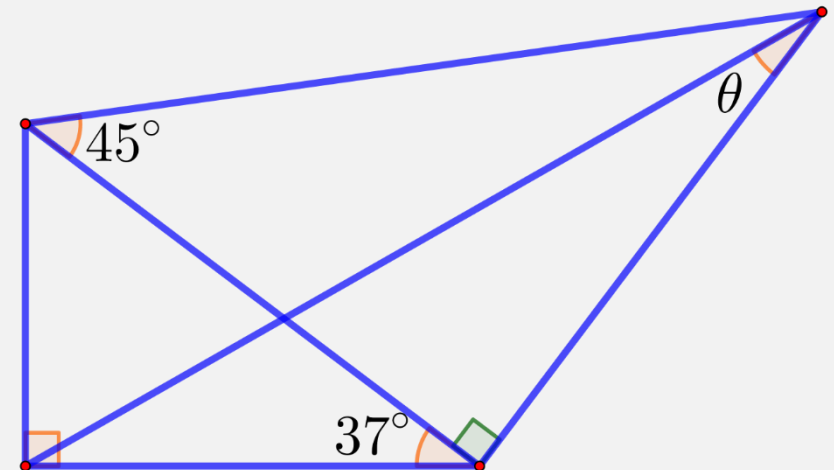


- A) $\sqrt{5} - 1$ B) $\sqrt{5} - 2$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{5} + 2$ E) $\sqrt{5} + 4$

CLAVE: D

PROBLEMA 12 (Ex UNI 2017-I)

De la figura mostrada, calcule el valor de $37 \tan(\theta)$



- A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

CLAVE: D

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

Se denominan **números recíprocos** a aquellos cuyo producto es igual a la unidad.

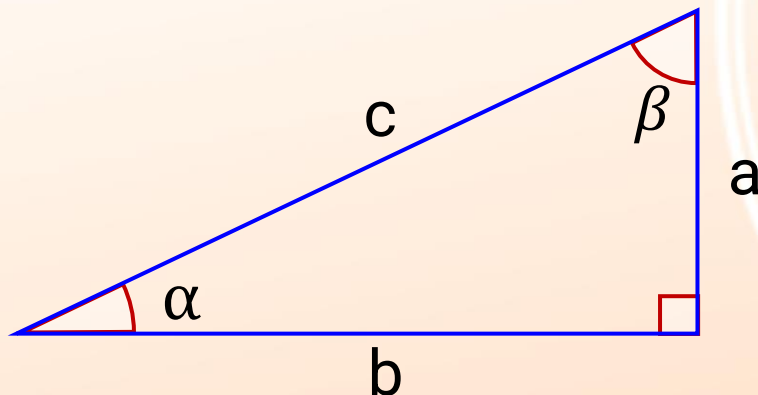
Razones trigonométricas recíprocas son aquellos pares de razones de un mismo ángulo, cuyo producto es igual a uno.

$$\text{sen}(\alpha) \cdot \text{csc}(\alpha) = 1$$

$$\text{cos}(\alpha) \cdot \text{sec}(\alpha) = 1$$

$$\text{tan}(\alpha) \cdot \text{cot}(\alpha) = 1$$

La justificación la encontramos en las comparaciones de las R.T.(α):



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\text{csc}(\alpha) = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\text{sec}(\alpha) = \frac{c}{b}$$

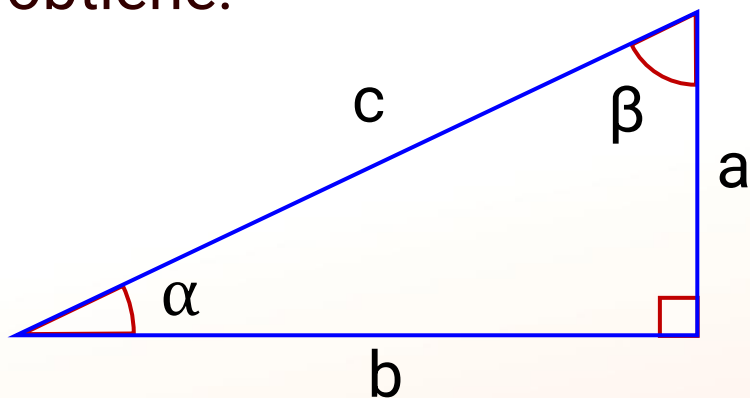
$$\text{tan}(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$\text{cot}(\alpha) = \frac{b}{a}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarias.

De la figura mostrada, comparando las R.T. de α con las R.T. de β se obtiene:



$\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$	$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \text{sen}(\beta)$
$\sec(\alpha) = \frac{c}{b} = \csc(\beta)$	$\csc(\alpha) = \frac{c}{a} = \sec(\beta)$
$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \cot(\beta)$	$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \tan(\beta)$

Equivalentemente:

$$\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \leftrightarrow \alpha + \beta = \pi/2$$

$$\text{sen}(\alpha) \cdot \sec(\beta) = 1 \leftrightarrow \alpha + \beta = \pi/2$$

$$\tan(\alpha) = \cot(\beta) \leftrightarrow \alpha + \beta = \pi/2$$

$$\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) = 1 \leftrightarrow \alpha + \beta = \pi/2$$

$$\sec(\alpha) = \csc(\beta) \leftrightarrow \alpha + \beta = \pi/2$$

$$\cos(\alpha) \cdot \csc(\beta) = 1 \leftrightarrow \alpha + \beta = \pi/2$$

PROBLEMA 13 (1er EX PARCIAL CEPRE UNI 2018 - I)

Si: $\text{sen}(3\alpha - \theta) \sec(3\theta - \alpha) = 2\text{sen}(30^\circ)$; con α y θ agudos, calcule:

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha + \theta}{3} + 15^\circ\right) + \tan(\alpha + \theta)}{\sec(\alpha + \theta + 15^\circ)}$$

A) $3/4$ B) $3/2$ C) $1/2$
 D) 1 E) $\sqrt{3}/2$

CLAVE: A

PROBLEMA 14

Si α y β son las medidas de dos ángulos agudos, de tal manera que se verifica:
 $\tan(2\beta - 40^\circ)\cot(\beta + 20^\circ) = 1$ y $\text{sen}(2\alpha - 30^\circ) = \cos(30^\circ + \alpha)$, entonces calcule $\cot(\beta - \alpha)$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

CLAVE: D

PROBLEMA 15

Si se cumple: $\cos(2x + 40^\circ) \csc(3x + 20^\circ) = \tan(34^\circ) \tan(56^\circ)$, donde $(2x + 40^\circ)$ y $(3x + 20^\circ)$ son las medidas de dos ángulos agudos, calcule : $\cot(6x - 6^\circ) \cdot \tan(5x) \cdot \cot(4x + 6^\circ)$

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) 0,75 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) $2 + \sqrt{3}$

CLAVE: A

PROBLEMA 16

Sean α y β las medidas de dos ángulos agudos y complementarios, de tal manera que se verifica

$$\tan(\alpha) + \cot(\beta) = -2\cot(\beta) + 3\tan(\beta) + 4$$

Calcule el valor de: $5\sin(\beta) + (\sqrt{13} - 5)\cos(\alpha)$

- A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) $\sqrt{13}$

CLAVE: B